
Feuille d'exercices n° 3. Exemples d'EDP: Transport, ondes et chaleur.
Compléments sur la transformée de Fourier.

Dans tout ce qui suit, N désigne un entier naturel non nul et Ω un borélien de $\mathbf{R}^N$. Sauf mention contraire on intégrera toujours par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 1. *Une équation différentielle pour s'échauffer.*
On considère l'équation différentielle sur $\mathbf{R}$:

$$u'(x) + \lambda x u(x) = 0,\ u \in S,\ \lambda > 0.$$

1. Déterminer u pour que $u(0) = 1$.
2. Quelle équation vérifie $\hat{u}$?
3. En déduire $\hat{u}$.

Exercice 2. *Transport à coefficient constant.*
Soit $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. Supposons que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N) \cap \mathcal{C}^1(\mathbf{R}; \mathcal{S}(\mathbf{R}^N))$ vérifie :

$$\partial_t u \ + \ a \cdot \nabla_x u \ = \ 0 \qquad \text{et} \qquad u(0, \cdot) = u_0, \quad a \in \mathbf{R}^N. \tag{1}$$

Déterminer $\widehat{u}$ en fonction de $\widehat{u_0} = \widehat{u}(0, \cdot)$, puis u en fonction de u_0 (et vérifier qu'il s'agit bien d'une solution classique satisfaisant les hypothèses de l'énoncé).

Exercice 3. *Équation de la chaleur.*
Soit $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. Supposons que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N) \cap \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+; \mathcal{S}(\mathbf{R}^N))$ vérifie

$$\partial_t u \ - \ \Delta_x u \ = \ 0 \qquad \text{et} \qquad u(0, \cdot) = u_0\,. \tag{2}$$

Déterminer $\widehat{u}$ en fonction de $\widehat{u_0}$, puis u en fonction de u_0 (et vérifier qu'il s'agit bien d'une solution classique satisfaisant les hypothèses de l'énoncé).

Exercice 4. *Équation des ondes*
On s'intéresse au problème de Cauchy pour l'équation des ondes homogène en dimension 1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbf{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \forall x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

avec $c \neq 0$. On suppose que $u_0, u_1 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ et que le problème admet une solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+, \mathcal{S}(\mathbf{R}))$.

1. On considère la transformée de Fourier pour la seule variable x, i.e.

$$\widehat{u}(\xi,t) = (\mathcal{F}_x u)(\xi,t) = \int_{\mathbf{R}} u(x,t)e^{-ix\xi}dx, \quad \forall(\xi,t) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$$

Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $t \mapsto \widehat{u}(\xi,t)$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}$.

2. En déduire que pour tout $(\xi,t) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ (en utilisant un prolongement adéquat en $\xi = 0$) :

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u}_0(\xi)\frac{e^{ic\xi t}+e^{-ic\xi t}}{2} + \widehat{u_1}(\xi)\frac{e^{ic\xi t}-e^{-ic\xi t}}{2ic\xi}$$

3. Conclure que la solution u vérifie pour tout $(x,t) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ la formule de d'Alembert :

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+ct)+u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y)dy$$

Faire un commentaire sur le sens physique (vitesse de propagation d'une onde).

4. Réciproquement, montrer que cette fonction est bien dans $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+, \mathcal{S}(\mathbf{R}))$ et vérifie le problème de Cauchy.

Exercice 5. *Conditions de saut.*

1. On rappelle que $H := 1_{\mathbf{R}_+}$ désigne la fonction de Heaviside. Retrouver H'.

2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue. On se donne $x_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ homéomorphisme croissant de classe $\mathcal{C}^1$ et $(u_-, u_+) \in \mathbf{R}^2$. À quelle condition la fonction

$$u : \quad \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad (t,x) \mapsto \begin{cases} u_- & \text{si } x < x_0(t) \\ u_+ & \text{si } x \geq x_0(t) \end{cases}$$

définit-elle une solution au sens des distributions de $\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$?